PEARSON Education

PEARSON Studium

wi wirtschaft

Fred Böker

Formelsammlung für Wirtschaftswissenschaftler

Mathematik und Statistik

PEARSON Studium

Kapitel 3
Summen, Produkte, Logik, Mengen, Abbildungen

3

3.1 Summen

Definition des Summenzeichens

Für $n \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad \sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

Rechenregeln für Summen

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$ **Additivität**

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$ **Homogenität**

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{i=p}^{q} c = (q - p + 1)c$$ **Summe über eine Konstante**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \sum_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$ **Verschiebung des Summationsindex**

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \qquad \sum_{i=1}^{1} a_i = a_1 \qquad \sum_{i=1}^{0} a_i := 0$$ **Rekursion**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$ **Unabhängigkeit von Bezeichnung des Index**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i \quad (1 \leq k < n)$$ **Aufteilung in Teilsummen**

3.2 Wichtige Summen und nützliche Formeln für Summen

Arithmetisches Mittel oder Mittelwert

Definition

Das arithmetische Mittel oder der Mittelwert der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist

$$\mu_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Nützliche Rechenregeln

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x) = 0$$ **Summe der Abweichungen vom Mittelwert ist Null**

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\mu_x^2$$ **Summe der quadratischen Abweichungen vom Mittelwert**

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_x)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \mu_x^2$$ **Mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert**

Arithmetische Reihe

Definition

Die Folge $a_1 = a, a_2, a_3, \ldots$ heißt eine arithmetische Reihe mit der **Differenz** d, wenn

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d = a + (n-1)d$$

Summenformel

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Reihe $a = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n = z$ mit Anfangsglied a und Schlussglied z ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=0}^{n-1}(a + id) = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (a + [n-1]d)\\ &= na + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{n}{2}\Big(a + \underbrace{(a + [n-1]d)}_{=:z}\Big) = \frac{n}{2}\Big(a + z\Big)\end{aligned}$$

3

Einige Summen spezieller arithmetischer Reihen

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$ **Summe der Zahlen von 1 bis *n***

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$$ **Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen**

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2 + 4 + \ldots + 2n = n(n+1)$$ **Summe der ersten *n* geraden Zahlen**

Summe der Quadrat- und Kubikzahlen

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$ **Summe der Quadrate**

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$$ **ungerade**

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2 = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1)$$ **gerade**

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$ **Summe der Kubikzahlen**

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$$ **ungerade**

$$\sum_{i=1}^{n}(2i)^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$ **gerade**

Geometrische Reihe

Definition

Die Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißt eine geometrische Reihe oder geometrische Folge mit dem Quotienten k, wenn

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$, d.h. $a_{n+1} = a_n \cdot k$ und $a_n = a_0 k^n$.

Summenformel*

Für eine geometrische Reihe mit dem Anfangsglied $a_0 = a$ und dem Quotienten k gilt:

$$\sum_{i=0}^{n-1} ak^i = a + ak + ak^2 + \ldots + ak^{n-1} = a\frac{k^n - 1}{k - 1} = a\frac{1 - k^n}{1 - k} \qquad (k \neq 1)$$

Speziell für $a_0 = 1$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = 1 + k + k^2 + \ldots + k^n = \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1} \qquad (k \neq 1)$$

Summe aufeinanderfolgender Differenzen

Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$

3.3 Doppelsummen

Annahmen

Gegeben seien $a_{ij} \in \mathbb{R} \quad 1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$, geschrieben in rechteckiger Anordnung:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

Zeilen- und Spaltensummen

Für die obige Anordnung ist die Zeilensumme über die i-te Zeile: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$

Die Spaltensumme über die j-te Spalte ist: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

* Siehe auch S. 130

Summe der Zeilen- oder Spaltensummen

Die Summe über alle Zeilensummen ist

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} + \sum_{j=1}^{n} a_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{n} a_{mj} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) =$$

$$(a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1n}) + (a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2n}) + \ldots + (a_{m1} + a_{m2} + \ldots + a_{mn})$$

Die Summe über alle Spaltensummen ist

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \right) =$$

$$(a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1}) + (a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{m2}) + \ldots + (a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{mn})$$

3

Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Summation

Die Summe der Zeilensummen ist gleich der Summe der Spaltensummen, d.h.

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Definition einer Doppelsumme

Eine Summe der Gestalt $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ heißt eine Doppelsumme.

3.4 Produkte

Definition des Produktzeichens

Für $n \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{R}$ ist

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \qquad \prod_{i=p}^{q} a_i = a_p \cdot a_{p+1} \cdot \ldots \cdot a_q$$

Rechenregeln für Produkte

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $q > p$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $a_i, b_i, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i \cdot b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \cdot \prod_{i=1}^{n} b_i \qquad \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} = \frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i}$$ **Multiplikativität**

$$\prod_{i=1}^{n}(c \cdot a_i) = c^n \prod_{i=1}^{n} a_i$$ **Homogenität vom Grad *n***

$$\prod_{i=1}^{n} c = c^n \qquad \prod_{i=p}^{q} c = c^{q-p+1}$$ **Produkt über eine Konstante**

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=0}^{n-1} a_{i+1} = \prod_{i=2}^{n+1} a_{i-1}$$ **Verschiebung des Index**

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1} \qquad \prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$$ **Rekursion**

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{j=1}^{n} a_j = \prod_{k=1}^{n} a_k$$ **Unabhängigkeit von Bezeichnung des Index**

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = \prod_{i=1}^{k} a_i \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_i \quad (1 \le k < n)$$ **Aufteilung in Teilprodukte**

3.5 Fakultäten und Binomialkoeffizienten

n Fakultät

Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ ist n Fakultät definiert durch: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{i=1}^{n} i \qquad 0! = 1$

Eigenschaften

$(n+1)! = n!(n+1)$

$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$ **Stirlingsche Formel für große $n \in \mathbb{N}$**

Binomialkoeffizient

Für $m, k \in \mathbb{N}_0; k \leq m$ ist der Binomialkoeffizient (gelesen als „m über k“) definiert durch

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

Äquivalente Definition

Für $k, m \in \mathbb{N}$ mit $k \leq m$ gilt die äquivalente Definition

$$\binom{m}{k} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k!} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

Man merke sich: Im Zähler und Nenner stehen jeweils k Faktoren natürlicher Zahlen, um 1 absteigend, beginnend bei m im Zähler und k im Nenner!

Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Es gelten die folgenden Regeln, die am Pascal’schen Dreieck überprüfbar sind!

$$\binom{0}{0} = 1 \qquad \binom{m}{0} = 1 \qquad \binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = m \qquad \binom{m}{m} = 1$$

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$ **Symmetrie**

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$$ **Additionssatz**

$$\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k} + \ldots + \binom{k}{k}$$ **Additionssatz**

$$\binom{m}{0} + \binom{m+1}{1} + \ldots + \binom{m+n}{n} = \binom{m+n+1}{n}$$ **Additionstheoreme**

$$\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m$$

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \ldots = \binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots = 2^{m-1}$$

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \ldots + (-1)^m \binom{m}{m} = 0$$

$$\binom{m}{0}^2 + \binom{m}{1}^2 + \ldots + \binom{m}{m}^2 = \binom{2m}{m}$$

Pascal'sches Dreieck

$$
\begin{array}{c|ccccccccccccccc}
m & & & & & & & & k & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \mathit{0} & & & & & & \\
\mathit{0} & & & & & & & & 1 & & \mathit{1} & & & & & \\
\mathit{1} & & & & & & & 1 & & 1 & & \mathit{2} & & & & \\
\mathit{2} & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & \mathit{3} & & & \\
\mathit{3} & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \mathit{4} & & \\
\mathit{4} & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \mathit{5} & \\
\mathit{5} & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \mathit{6} \\
\mathit{6} & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
n & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \binom{n}{2} & & \dots & & \dots & & \dots & & \binom{n}{n-1} & & \binom{n}{n}
\end{array}
$$

Jede Zahl ist Summe der beiden Nachbarn links und rechts in der Zeile darüber.

Newtons Binomische Formeln

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a+b \\
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4
\end{aligned}
$$

$$
(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \ldots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{m-k} b^k
$$

3.6 Aussagenlogik

Aussage und Aussageform

Eine Aussage ist eine Behauptung (Satz) p, der (dem) eindeutig der Wahrheitswert wahr (W) oder falsch (F) zugeordnet werden kann.

Eine offene Aussage oder Aussageform ist eine Aussage $p(x)$, in der eine Variable vorkommt. Erst nach Einsetzen des Variablenwertes kann über den Wahrheitswert entschieden werden.

Negation einer Aussage

Ist p eine Aussage, so ist $\neg p$ (Nicht p, gelegentlich auch $\bar{p}$ oder $\sim p$) die Negation dieser Aussage mit den Wahrheitswerten $\begin{cases} W & \text{falls } p \text{ falsch} \\ F & \text{falls } p \text{ wahr} \end{cases}$

Verbindung zweier Aussagen

Zwischen zwei Aussagen p und q gibt es die folgenden Verbindungen oder Verknüpfungen:

Aussagenverbindung	Name	Notation
p und q	Konjunktion	$p \wedge q$
p oder q	Disjunktion	$p \vee q$
Wenn p, so q (Aus p folgt q)	Implikation (Subjunktion)	$p \to q$
p genau dann, wenn q (p äquivalent zu q)	Äquivalenz (Bijunktion)	$p \leftrightarrow q$

Sie werden durch die folgende Wahrheitstafel definiert:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

Notation: Statt $p \to q$ bzw. $p \leftrightarrow q$ findet man auch $p \Rightarrow q$ bzw. $p \Leftrightarrow q$

Tautologie

Definition

Eine Tautologie (Identität oder ein aussagenlogisches Gesetz) ist eine Aussagenverbindung, die stets wahr ist.

Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten und vom Widerspruch

Die folgenden Aussagenverbindungen sind Tautologien:

$p \vee \neg p$ **Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten**

$\neg(p \wedge \neg p)$ **Gesetz vom Widerspruch**

Tautologische Äquivalenzen (⇔)

$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$	**Doppelte Negation**
$p \vee p \Leftrightarrow p \qquad p \wedge p \Leftrightarrow p$	**Idempotenz**
$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow p \vee q \vee r$	**Assoziativität**
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$	**Assoziativität**
$((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)) \Leftrightarrow p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$	**Assoziativität**
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p \qquad p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p \qquad (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$	**Kommutativität**
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \qquad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	**Distributivität**
$\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	**Negation der Implikation**
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	**de Morgansche Regeln**
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$	
$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	**Kontraposition**
„entweder p oder q“ $\Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)]$	
$p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \qquad p \wedge (q \vee \neg q) \Leftrightarrow p$	
$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$	
$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$	
$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \qquad (p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	

Tautologische Implikationen: (⇒)

$p \wedge q \Rightarrow p \qquad p \wedge q \Rightarrow q$	**Vereinfachung**
$p \Rightarrow p \vee q \qquad q \Rightarrow p \vee q$	**Addition**
$\neg p \Rightarrow (p \rightarrow q) \qquad q \Rightarrow (p \rightarrow q)$	
$\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p \qquad \neg(p \rightarrow q) \Rightarrow \neg q$	
$\neg p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$	
$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	**Transitivität, Kettenschluss**
$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	**Abtrennungsregel, direkter Schluss**
$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \neg p$	
$[p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)] \Rightarrow q$	**Indirekter Schluss**
$[(p_1 \vee p_2) \wedge (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q)] \Rightarrow q$	**Fallunterscheidung**
$[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	**Fallunterscheidung, Alternativschluss**

Quantoren

Definition

Das Zeichen $\forall$ heißt der **Allquantor** und $(\forall x\colon p(x))$ bedeutet: für alle x ist die Aussage $p(x)$ wahr.

Das Zeichen $\exists$ heißt der **Existenzquantor** und $(\exists x\colon p(x))$ bedeutet: Es gibt (existiert) ein x, für das $p(x)$ wahr ist.

Rechenregeln für Quantoren

$\forall x\colon p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\colon \neg p(x) \qquad \exists x\colon p(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\colon \neg p(x)$ **Austausch der Quantoren**

$\forall x\colon p(x) \wedge q(x) \Leftrightarrow \forall x\colon p(x) \wedge \forall x\colon q(x)$ **Distributivgesetz**

$\exists x\colon p(x) \vee q(x) \Leftrightarrow \exists x\colon p(x) \vee \exists x\colon q(x)$ **Distributivgesetz**

$\forall x\colon (p \vee q(x)) \Leftrightarrow p \vee (\forall x\colon q(x)) \qquad \forall x\colon (p \wedge q(x)) \Leftrightarrow p \wedge (\forall x\colon q(x))$

$\exists x\colon (p \vee q(x)) \Leftrightarrow p \vee (\exists x\colon q(x)) \qquad \exists x\colon (p \wedge q(x)) \Leftrightarrow p \wedge (\exists x\colon q(x))$

$\forall x\colon p(x) \to q \Leftrightarrow \exists x\colon p(x) \to q$

$p \to \forall x\colon q(x) \Leftrightarrow \forall x\colon p \to q(x) \qquad p \to \exists x\colon q(x) \Leftrightarrow \exists x\colon p \to q(x)$

$(\forall x\colon p(x)) \vee (\forall x\colon q(x)) \Rightarrow \forall x\colon p(x) \vee q(x)$

$(\exists x\colon p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists x\colon p(x)) \wedge (\exists x\colon q(x))$

$\forall x\colon \forall y\colon p(x,y) \Leftrightarrow \forall y\colon \forall x\colon p(x,y)$ **Kommutativgesetz**

$\exists x\colon \exists y\colon p(x,y) \Leftrightarrow \exists y\colon \exists x\colon p(x,y)$ **Kommutativgesetz**

3.7 Mathematische Beweise

Mathematische Sätze als Implikationen

Mathematische Sätze (Theoreme) können als Implikationen $P \Rightarrow Q$ formuliert werden, wobei P und Q jeweils eine Aussage oder eine Reihe von Aussagen sind. Bedeutung: Wenn P wahr ist, so ist notwendig auch Q wahr. Andere Redeweisen für $P \Rightarrow Q$: P impliziert Q; wenn P, dann auch Q; Q ist eine Folgerung (folgt) aus P; Q, wenn P; P nur, wenn Q oder Q ist eine Implikation von P. Besonders wichtig sind die Formulierungen:

P ist eine **hinreichende Bedingung** für Q und Q ist eine **notwendige Bedingung** für P.

Direkter und indirekter Beweis

Bei einem direkten Beweis zeigt man ausgehend von P, dass Q wahr ist.

Bei einem indirekten Beweis nimmt man an, dass Q nicht gilt und zeigt, dass dann auch P nicht gilt, denn* es gilt:

$$P \Rightarrow Q \quad \text{ist äquivalent zu} \quad \mathit{Nicht}\ Q \Rightarrow \mathit{Nicht}\ P$$

Logische Äquivalenz

Gilt $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow P$, so liegt eine logische Äquivalenz vor: $P \Leftrightarrow Q$ mit den Redeweisen: P ist äquivalent zu Q; P dann und nur dann, wenn Q; P genau dann, wenn Q oder: P **ist eine notwendige und hinreichende Bedingung für** Q**.**

3

Mathematische oder vollständige Induktion

Soll eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ (wobei n_0 meistens 0 oder 1 ist) bewiesen werden, so kann der **Beweis durch vollständige Induktion** angewendet werden:

1) **Induktionsanfang:** Es ist zu zeigen, dass $A(n_0)$ wahr ist.
2) **Induktionsvoraussetzung:** Die Aussage $A(n)$ sei wahr für $n = k$ oder alle $n \leq k$.
3) **Induktionsschritt:** Unter der Induktionsvoraussetzung ist zu zeigen, dass die Aussage auch für die nächstfolgende Zahl $n = k + 1$ wahr ist.

Wenn 1) und 3) gezeigt werden können, ist $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr.

3.8 Mengen

Grundlegende Definitionen

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von bestimmten unterscheidbaren Objekten zu einer Gesamtheit. Die Gesamtheit aller betrachteten Objekte ist die **Grundmenge** (Universalmenge), die mit Ω bezeichnet wird. Die Objekte heißen die **Elemente** der Menge.

$$a \in M \iff a \text{ ist Element der Menge } M.$$
$$a \notin M \iff a \text{ ist nicht Element der Menge } M.$$

Die **leere Menge** $\emptyset$ ist die Menge, die kein Element enthält. Zwei Mengen sind **disjunkt**, wenn sie kein Element gemeinsam haben.

Die Menge A ist **Teilmenge** von B, wenn jedes Element aus A auch in B liegt:

$$A \subseteq B \iff (x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

* Siehe *Kontraposition* unter den tautologischen Äquivalenzen oder *indirekter Schluss* unter den tautologischen Implikationen.

Die Teilmenge A ist **echte Teilmenge*** von B, wenn es ein $x \in B$ gibt, das nicht in A liegt:

$$A \subset B \iff (A \subseteq B \wedge (\exists x \in B\colon x \notin A))$$

Zwei Mengen A und B sind **gleich**, wenn jedes Element aus A in B und jedes Element aus B auch in A liegt.

$$A = B \iff (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$$

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(\Omega)$ ist die Menge aller Teilmengen von Ω, d.h.

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A | A \subseteq \Omega\}$$

Eine Menge kann spezifiziert (definiert) werden durch:

- Auflistung aller Elemente in der Menge: $M = \{a, b, c, \ldots\}$
- Spezifikation einer Eigenschaft mittels einer Aussageform: $M = \{x \in \Omega\colon A(x) \text{ ist wahr}\}$

Rechenregeln für Mengen

$A \subseteq A$ **Reflexivität** $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$ **Transitivität**

$\emptyset \subseteq A \quad \forall A$ **Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge**

$A \subseteq B \iff A \cup B = B \iff A \cap B = A \iff \complement B \subseteq \complement A$

$A = A$ **Reflexivität** $A = B \Rightarrow B = A$ **Symmetrie**

$(A = B \wedge B = C) \Longrightarrow A = C$ **Transitivität**

Definition von Verknüpfungen zweier Mengen

Zwischen zwei Mengen A und B werden die folgenden Mengenverknüpfungen definiert:

* Gelegentlich auch nur die Notation: $\subset$

$A \cup B$	A **Vereinigung** B, Vereinigungsmenge	besteht aus allen Elementen, die zu wenigstens einer der Mengen A und B gehören: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$
$A \cap B$	A **Durchschnitt** B, Schnittmenge	besteht aus allen Elementen, die zu A und zu B gehören: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$
$A \setminus B$	A **minus** B Differenzmenge, Restmenge	besteht aus allen Elementen, die zu A, aber nicht zu B gehören (Differenz von A und B): $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$
$\complement A$	A **Komplement**	besteht aus allen Elementen einer Grundmenge Ω, die nicht zu A gehören; andere Notationen: $\tilde{A}, \bar{A}, A^c$ $\complement A = \{x : x \in \Omega \text{ und } x \notin A\} = \Omega \setminus A$

Rechenregeln für Mengenverknüpfungen

$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$ **Idempotenz**

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$ **Kommutativität**

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ **Assoziativität**

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ **Assoziativität**

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **Distributivität**

$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap \Omega = A \qquad A \cup \Omega = \Omega \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$ **Identitäten**

$A \cup \complement A = \Omega \qquad A \cap \complement A = \emptyset \qquad \complement(\complement A) = A$ **Komplementarität**

$\complement\emptyset = \Omega \qquad \complement\Omega = \emptyset$ **Komplement der leeren Menge und der Grundmenge**

$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$ **Verschmelzung, Absorptionsgesetz**

$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \qquad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$ **de Morgansche Regeln**

$(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ **Satz vom Widerspruch**

$(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ **Satz vom ausgeschlossenen Dritten**

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \complement B \qquad A \setminus A = \emptyset$

$A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$

Mehrfache Verknüpfungen

Für $n \in \mathbb{N}$ ist:

- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x | \exists\, i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}$ **Menge aller Elemente, die zu mindestens einer der Mengen A_i gehören.**
- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x | \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x \in A_i\}$ **Menge aller Elemente, die zu allen Mengen A_i gehören.**

Kreuzprodukte, grundlegende Definitionen

- Ein **geordnetes Paar** (a, b) ist ein Paar von zwei Elementen, wobei die Reihenfolge zu berücksichtigen ist.
- Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann **gleich**, wenn $a = c$ und $b = d$.
- Die **Produktmenge (Paarmenge, kartesisches Produkt, Kreuzprodukt)** zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$$

- **Kreuzprodukt von *n* Mengen:**

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$$

- Die Elemente von $\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, d.h. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ heißen ***n*-Tupel** (Paare für $n = 2$, Tripel für $n = 3$). Die Reihenfolge der Elemente ist zu berücksichtigen.
- ***n*-faches Kreuzprodukt mit sich selbst:**

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ mal}} = A^n \qquad \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ mal}} = \mathbb{R}^n$$

Rechenregeln für Kreuzprodukte

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ $\qquad$ $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ $\qquad$ $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$

$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ $\qquad$ $A \subseteq C$ und $B \subseteq D \Longrightarrow A \times B \subseteq C \times D$

Kardinalzahl einer Menge

Für eine Menge A mit endlich vielen Elementen heißt die mit $n(A)$ bezeichnete Anzahl der Elemente in A die Kardinalzahl (Mächtigkeit) von A.

Rechenregeln für Kardinalzahlen

Für $A, B \subseteq \Omega$ mit $n(\Omega) < \infty$ gilt:

$n(A) \geq 0 \qquad n(\emptyset) = 0 \qquad n(A) \leq n(\Omega) \qquad n(\Omega) = k \implies n(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^k$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \qquad n(A \cup B) = n(A) + n(B) \iff A \cap B = \emptyset$

$n(A \cup B) = n(A \setminus B) + n(B \setminus A) + n(A \cap B)$

$n(A \cap B) \leq n(A) \qquad n(A \cap B) = n(A) \iff B \subseteq A$

$n(\mathcal{C}A) = n(\Omega) - n(A) \qquad n(\mathcal{C}A) + n(A) = n(\Omega)$

$n(A \setminus B) \leq n(A) \qquad n(A \setminus B) = n(A) \iff A \cap B = \emptyset$

$n(A \setminus B) = 0 \iff A \subseteq B$

$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B) \qquad n(A^n) = (n(A))^n$

3.9 Abbildungen, Relationen

Grundlegende Definitionen

Eine Teilmenge des Kreuzprodukts $M_1 \times M_2$ des Produkts zweier Mengen M_1 und M_2 wird als **Abbildung** A (auch **Relation**) aus M_1 in M_2 bezeichnet:

$$A \subseteq M_1 \times M_2$$

Dabei ist

$$D_A = \{x \in M_1 | \exists y \in M_2 \colon (x, y) \in A\}$$

der **Definitionsbereich** von A,

$$W_A = R_A = \{y \in M_2 | \exists x \in M_1 \colon (x, y) \in A\}$$

der **Wertebereich** (range) von A und

$$A^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in A\}$$

die **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung** zu A.

Eigenschaften von Abbildungen

- A ist eine Abbildung **von** M_1 in M_2, wenn $D_A = M_1$, und eine Abbildung **auf** M_2, wenn $W_A = M_2$ ist.
- A heißt **eindeutig** oder eine **Funktion**, wenn jedem Element $x \in D_A$ nur ein Element $y \in W_A$ zugeordnet wird.
- A heißt **eineindeutig** oder **umkehrbar eindeutig**, wenn A und A^{-1} eindeutig sind.
- Eine eindeutige Abbildung von M_1 auf M_2 heißt **surjektiv**.

- Eine eindeutige Abbildung A heißt **injektiv**, wenn aus $(x_1, y) \in A$ und $(x_2, y) \in A$ folgt, dass $x_1 = x_2$, d.h., wenn jedes Bildelement nur einmal vorkommt, d.h., gleiche Bilder stammen von gleichen Urbildern oder verschiedene Originale liefern verschiedene Bilder.
- Eine Abbildung ist **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist, d.h., wenn sie eine eineindeutige Abbildung von M_1 auf M_2 ist.
- Statt $(x, y) \in A$ schreibt man auch: $A(x) = y$, wobei x das Urbild (Original) und y das (ein) Bild von x ist.

Binäre Relation, Definition

Eine Abbildung R aus M in M, d.h., eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ wird als binäre Relation auf M bezeichnet und man schreibt:

$$(x, y) \in R \iff xRy \qquad (x, y) \notin R \iff x\not{R}y$$

Eigenschaften von binären Relationen

Eine binäre Relation R auf M heißt

- **reflexiv**, wenn xRx für alle $x \in M$
- **symmetrisch**, wenn $xRy \Rightarrow yRx$ für alle $x, y \in M$
- **transitiv**, wenn $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ für alle $x, y, z \in M$
- **irreflexiv**, wenn $x\not{R}x$ für alle $x \in M$
- **antisymmetrisch**, wenn $x \neq y \wedge xRy \Rightarrow y\not{R}x$
- **vollständig**, wenn $x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$

Spezielle Relationen

Eine Relation R auf M heißt eine

- **Äquivalenzrelation**, wenn sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
- **Halbordnung**, wenn sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.
- **Verträglichkeitsrelation**, wenn sie transitiv und antireflexiv ist.
- **Quasiordnung**, wenn sie transitiv und antireflexiv ist.
- **Lineare Ordnung**, wenn sie vollständig und eine Halbordnung ist.